# 1 Vorbemerkungen

Die folgenden Runge-Kuttaverfahren sind in sog. *Butcher-Schemata* gegeben.

| $c_i$ | $a_{ij}$ |
|---|---|
| | $b_j$ |

Tabelle 1: Allgemeine Gestalt des Butcher-Schemas

Der Wert einer Lösung einer DGL $y' = f(x, y)$ errechnet sich dabei mit den so gegebenen Koeffizienten über die Formeln

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{\mu=1}^{p} b_\mu k_\mu \tag{1}$$

$$k_\mu = hf(x_i + c_\mu h, y_i + \sum_{\rho=1}^{p} a_{\mu\rho} k_\rho) \tag{2}$$

Zu jedem Verfahren wird dessen Ordnung $\nu$, die Zahl der Auswertungen im Teilintervall $p$ sowie die Länge des Stabilitätsintervalles $d$ gegeben. $p$ kann dabei allgemein als ein Maß für den Rechenaufwand, $\nu$ für die Güte der Lösung und $d$ für das Konvergenzverhalten gesehen werden. Je höher der jeweilige Wert, desto höher ist auch der Rechenaufwand bzw. die Güte oder desto besser das Konvergenzverhalten.

# 2 Explizite Runge-Kuttaverfahren

## 2.1 Poygonzugverfahren

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 1 | 1 | -1 |

| | |
|---|---|
| 0 | |
| | 1 |

## 2.2 verbessertes Polygonzugvefahren

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 2 | 2 | ? |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1/2 | 1/2 | |
| | 0 | 1 |

## 2.3 Euler-Cauchyverfahren

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 2 | 2 | -2 |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1 | 1 | |
| | 1/2 | 1/2 |

## 2.4 Nyströmverfahren

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 3 | 3 | -2,51275 |

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 2/3 & 2/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/8 & 3/8 \end{array}$$

## 2.5 klassisches Runge-Kuttaverfahren 3. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 3 | 3 | ? |

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

**Nicht zu empfehlen**, da zu große Unterschiede in den Größenordnungen der Koeffizienten.

## 2.6 Heunverfahren

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 3 | 3 | ? |

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Zu empfehlen, da Koeffizienten wenig verschieden und viele Koeffizienten gleich Null.

## 2.7 3/8 - Regel

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 4 | 4 | ? |

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

## 2.8 klassisches Runge-Kuttaverfahren 4. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 4 | 4 | -2,78529 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1/2 | 1/2 | | | |
| 1/2 | 0 | 1/2 | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 |

### 2.9 Lawsonverfahren

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 5 | 6 | -5,60397 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 1/2 | 1/2 | | | | | |
| 1/4 | 3/16 | 1/16 | | | | |
| 1/2 | 0 | 0 | 1/2 | | | |
| 3/4 | 0 | $-3/16$ | 3/8 | 9/16 | | |
| 1 | 1/7 | 4/7 | 6/7 | $-12/7$ | 8/7 | |
| | 7/90 | 0 | 16/45 | 2/15 | 16/45 | 7/90 |

### 2.10 Butcherverfahren

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 6 | 7 | -2,85611 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | |
| 1/2 | 1/2 | | | | | | |
| 2/3 | 2/9 | 4/9 | | | | | |
| 1/3 | 7/36 | 2/9 | $-1/12$ | | | | |
| 5/6 | $-35/144$ | $-55/36$ | 35/48 | 15/8 | | | |
| 1/6 | $-1/360$ | $-11/36$ | $-1/8$ | 1/2 | 1/10 | | |
| 1 | $-41/260$ | 22/13 | 43/156 | $-118/39$ | 32/195 | 80/39 | |
| | 13/200 | 0 | 11/40 | 11/40 | 4/25 | 4/25 | 13/200 |

## 3 implizite Runge-Kuttaverfahren

### 3.1 Gauss-Legendre 2. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 2 | 1 | $-\infty$ |

| | |
|---|---|
| 1/2 | 1/2 |
| | 1 |

### 3.2 Gauss-Legendre 4. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 4 | 2 | $-\infty$ |

| | | |
|---|---|---|
| $1/2-w$ | $1/4$ | $1/4-w$ |
| $1/2+w$ | $1/4+w$ | $1/4$ |
| | $1/2$ | $1/2$ |

$$w = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

### 3.3 Gauss-Legendre 6. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 6 | 3 | $-\infty$ |

$$\begin{array}{c|ccc} 1/2 - w/10 & 5/36 & 2/9 - w/15 & 5/36 - w/30 \\ 1/2 & 5/36 + w/24 & 2/9 & 5/36 - w/24 \\ 1/2 + w/10 & 5/36 + w/30 & 2/9 + w/15 & 5/36 \\ \hline & 5/18 & 4/9 & 5/18 \end{array}$$

$$w = \sqrt{15}$$

### 3.4 Radau IA 1. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 1 | 1 | ? |

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

### 3.5 Radau IA 2. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 3 | 2 | ? |

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

$$w = \sqrt{15}$$

### 3.6 Radau IA 3. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 5 | 3 | ? |

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 1/9 & -1/18 - w/18 & -1/18 + w/18 \\ 3/5 - w/10 & 1/9 & 11/45 + 7w/360 & 11/45 - 43w/360 \\ 3/5 + w/10 & 1/9 & 11/45 + 43w/360 & 11/45 - 7w/360 \\ \hline & 1/9 & 4/9 + w/36 & 4/9 - w/36 \end{array}$$

$$w = \sqrt{6}$$

### 3.7 Radau IIA 1. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 1 | 1 | ? |

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

### 3.8 Radau IIA 3. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 3 | 2 | ? |

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

### 3.9 Radau IIA 5. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 5 | 3 | $-\infty$ |

$$\begin{array}{c|ccc} 2/5-w/10 & 11/45-7w/360 & 37/225-169w/1800 & -2/225-w/75 \\ 2/5+w/10 & 37/225+169w/1800 & 11/45+7w/360 & -2/225-w/75 \\ 1 & 4/9+w/36 & 4/9+w/36 & 1/9 \\ \hline & 4/9-w/36 & 4/9+w/36 & 1/9 \end{array}$$

$$w=\sqrt{6}$$

### 3.10 Radau I 1. Ordnung

siehe 2.1.

### 3.11 Radau I 3.Ordnung (Verfahren von Hamming-Hollingworth)

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 3 | 2 | |

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

### 3.12 Radau I 5. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 5 | 3 | ? |

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/5-w/10 & 3/35+w/75 & 1/5+w/120 & 7/25-73w/600 \\ 3/5+w/10 & 3/25+w/75 & 7/25+73w/600 & 1/5-w/120 \\ \hline & 1/9 & 4/9+w/36 & 4/9-w/36 \end{array}$$

$$w=\sqrt{6}$$

### 3.13 Lobatto IIIA 2. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 2 | 2 | ? |

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

### 3.14 Lobatto IIIA 4. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 4 | 3 | ? |

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

### 3.15 Lobatto IIIA 6. Ordnung

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | 6 | 3 | ? |

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 - w/10 & 11/120 + w/120 & 5/24 - w/120 & 5/24 - 13w/120 & -1/120 + w/120 \\ 1/2 + w/10 & 11/120 - w/120 & 5/24 + w/120 & 5/24 + 13w/120 & -1/120 - w/120 \\ 1 & 1/12 & 5/12 & 5/12 & 1/12 \\ \hline & 1/12 & 5/12 & 5/12 & 1/12 \end{array}$$

$$w = \sqrt{5}$$

### 3.16 SDIRK-Verfahren

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| implizit | $\geq 2$ | 2 | $-\infty$ bzw. ? |

$$\begin{array}{c|cc} w & w & 0 \\ 1 - w & 1 - 2w & w \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Für $w = 1/2 + 1/6\sqrt{3}$ gilt $d = -\infty$
Für $w = 1/2 - 1/6\sqrt{3}$ gilt nur $d =$?

## 4 Adaptive Verfahren

### 4.1 Fehlberg

| Typ | $\nu$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| explizit | 5/4 | 6/5 | ? |

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ 1/4 & 1/4 & & & & & \\ 3/8 & 3/32 & 9/32 & & & & \\ 12/13 & 1932/2197 & -7200/2197 & 7296/2197 & & & \\ 1 & 439 & -8 & 3680/513 & -845/4104 & & \\ \hline 1/2 & -8/27 & 2 & -3544/2565 & 1859/4104 & -11/40 & \\ \hline\hline & 25/216 & 0 & 1408/2565 & 2197/4104 & -1/5 & \\ \hline & 16/135 & 0 & 6656/12825 & 28561/56430 & -9/50 & 2/55 \end{array}$$